Контрольная по теме «Арифметика»

К5◇1. Докажите, что число $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ иррационально.

К5◇2. Пусть $n \in \mathbb{N}$.

а) Существует ли натуральное число, большее n и взаимно простое со всеми натуральными числами, не превосходящими n?

б) Допустим, такое число существует. Верно ли, что наименьшее из таких чисел автоматически является простым?

К5◇3. Сколько двоек в разложении $1001 \cdot 1002 \cdot \cdots \cdot 2000$ на простые множители?

К5◇4. Какие остатки может давать $(n-1)!$ от деления на n в зависимости[1] от $n \in \mathbb{N}$?

К5◇5. Найдите все натуральные числа, кончающиеся на девятку[2] и дающие остаток 11 от деления на 12.

К5◇6. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $\text{НОД}(a, b) = d$. Сколько членов конечной арифметической прогрессии

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ ,\ ba$$

делится на b?

К5◇7. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое. Обозначим через $\mathbb{F}_p^*$ множество всех ненулевых чисел в p-арифметике и зафиксируем произвольное число $[a]_p \in \mathbb{F}_p^*$.

а) Докажите, что отображение $\mathbb{F}_p^* \xrightarrow{[m]_p \mapsto [m]_p \cdot [a]_p} \mathbb{F}_p^*$, задаваемое умножением всех чисел на $[a]_p$, взаимно однозначно (т. е. является перестановкой множества $\mathbb{F}_p^*$).

б) Верно ли, что в разложении этой перестановки в композицию непересекающихся циклов все циклы имеют одинаковую длину?

в°) (утешительная версия) Если общий случай вызывает затруднения, сделайте эту задачу для $p = 179$, $a = 57$ и найдите длины всех циклов в (б).

* * *

К5◇8* (дополнительная). Пусть $p > 2$ — натуральное простое число. Верно ли, что

а) ровно половина ненулевых чисел p-арифметики является квадратами?

б) уравнение $x^2+y^2 = [a]_p$ разрешимо в p-арифметике при любом a (например, при $a = -1$)?

---

[1] укажите точно при каких n какие остатки получаются

[2] в десятичной записи, разумеется