Контрольная по теме «Множества и комбинаторика»

К3◇1. Сколько имеется движений плоскости, переводящих заданный правильный n-угольник в себя?

К3◇2. В выражении $(1 + a^4 + b^3)^3(a^3 + b^2)^7$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Будет ли среди них одночлен, содержащий **а)** a^6b^{10} **б)** $a^{13}b^{12}$, и если будет, то с каким коэффициентом?

К3◇3. Сколько чисел первой сотни не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5?

К3◇4. Из стандартной 52-карточной колоды сдают (неупорядоченный) набор из 5 карт.

а) Сколько всего имеется таких сдач?

б) Сколько из них состоит из двух карт одинакового достоинства и ещё трёх карт тоже одинакового, но другого достоинства[1]?

К3◇5. Пусть $n \leqslant m$. Сколько имеется **а)** возрастающих[2] **б)** неубывающих[3] отображений из $\{1, 2, \ldots, n\}$ в $\{1, 2, \ldots, m\}$

К3◇6 (Н. Н. Константинов). В городе N разрешаются лишь простые, «двусторонние» обмены квартир[4], причём в течение одного дня каждому жителю разрешается сделать не более одного обмена. Можно ли за два дня осуществить любой, сколь угодно сложный обмен[5]?

К3◇7. Грани кубика произвольным образом раскрашивают в красный, синий и белый цвета. Сколько разных крашеных кубиков может при этом получиться?

---

[1] в поккере такая сдача называется «фул»

[2] отображение $N \xrightarrow{f} M$ между двумя упорядоченными множествами называется *возрастающим*, если из $x_1 < x_2$ всегда вытекает, что $f(x_1) < f(x_2)$

[3] отображение $N \xrightarrow{f} M$ между двумя упорядоченными множествами называется *неубывающим*, если из $x_1 < x_2$ всегда вытекает, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (отличается от предыдущего тем, что второе неравенство нестрогое)

[4] т. е. такие, при которых A въезжает в квартиру, принадлежавшую B, а B въезжает в квартиру, принадлежавшую A; более сложные цепочки обменов, например, когда A въезжает в квартиру, принадлежавшую B, B въезжает в квартиру, принадлежавшую C, а уже C въезжает в квартиру, принадлежавшую A, запрещены

[5] т. е. произвольное взаимно однозначное отображение из множества квартир в себя