Контрольная по теме «Суммы и прогрессии»

К1◇1. Найдите сумму всех положительных трёхзначных чисел, не делящихся ни на 2 ни на 3.

К1◇2. Упростите произведение

$$(1 - M_2^{-1})(1 - M_3^{-1}) \cdots (1 - M_n^{-1})$$

в котором M_k — это k-е m-угольное число. Если общий случай не получается, попробуйте сделать эту задачу хотя бы для $m = 5$.

К1◇3. Вычислите суммы:

а) $1 \cdot 2 \cdot n + 2 \cdot 3 \cdot (n-1) + 3 \cdot 4 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot 2$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{179}+\sqrt{177}}$;

в) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ (всего m слагаемых);

г) $1^3 \cdot q + 2^3 \cdot q^2 + 3^3 \cdot q^3 + 4^3 \cdot q^4 + \cdots$ (всего m слагаемых).

К1◇4. Верно ли, что в в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, содержится бесконечная геометрическая прогрессия?

К1◇5. Однажды Коля и Толя должны были съесть на завтрак по одинаковой тарелке манной каши. Но в первую же секунду Толя ловко переложил половину своей каши Коле, однако тот тут же отложил половину образовавшейся у него Каши назад Толе, но тот снова вернул ему половину всей своей каши и т. д. до бесконечности, причём каждое новое откладывание совершалось вдвое быстрее предыдущего.

а) В каком отношении разделится каша через 2 секунды?

б) Как изменится ответ, если на каждом шаге каждый из ребят будет перекладывать другому не 50%, а Q % своей каши?

в) Каким должно быть Q, чтобы каша поделилась поровну?

К1◇6. Имеется 10 кг воды и 10 кг грязного белья, пропитанного стиральным порошком. При погружении любого количества белья в любое количество воды вся грязь мгновенно и равномерно распределяется между водой и бельём. Можно ли прополоскать бельё так, чтобы количество грязи в нём уменьшилось строго больше, чем **а)** на 50% **б*)** на 60% ?