Действительные числа и БДД

Бесконечная десятичная дробь (БДД) — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида $\pm\overline{b_{-n}\ldots b_{-1}b_0, b_1b_2\ldots b_m\ldots}$. Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, и их обычно не пишут.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер $i \in \mathbb{Z}$, такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее i-того совпадают, в i-том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей i-той цифрой имеет справа от i-того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки. Иными словами, $\overline{b_\beta\ldots b_{i-1}\,b_i\,9999\ldots} = \overline{b_\beta\ldots b_{i-1}\,(b_i+1)\,0000\ldots}$ как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

М14◇1. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Неравенства. Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$.

Ограниченность. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M \subset \mathbb{R}$, если $b \geqslant x \quad \forall x \in M$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

М14◇2°. Не употребляя отрицаний, дайте определения:

а) числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$;

б) множества, неограниченного сверху **в)** неограниченного множества.

Максимальные элементы. Число $m \in M$, такое что $m \geqslant x \quad \forall x \in M$, называется *максимальным элементом* множества $M \subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: ТНГ) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

М14◇3°. Дайте определение *минимального* элемента и *точной верхней грани* (сокращённо: ТВГ) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

М14◇4. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

М14◇5. Вычислите ТВГ множеств: **а)** $\{0,3\,;\ 0,33\,;\ 0,333\,;\ 0,3333\,;\ 0,33333\,;\ \ldots\}$;

б) сумм $1 + q + q^2 + \cdots + q^m$ с фиксированным $0 < q < 1$ (скажем, $q = 1/2$) и любым $m \in \mathbb{N}$.

М14◇6. Верно ли, что любая БДД $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ множества:

а) всех БДД, меньших b; **б)** всех конечных БДД, меньших b;

в) всех конечных БДД, являющихся начальными кусками b.

М14◇7 (теорема о полноте). Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу – точную нижнюю.

М14◇8 (сложение и умножение). Суммой БДД $a, b \in \mathbb{R}$ называется ТВГ чисел вида $\alpha + \beta$, где $\alpha < a$ и $\beta < b$ — всевозможные *конечные* БДД. Аналогично, произведение ab двух *положительных* БДД — это ТВГ чисел вида $\alpha\beta$ с *конечными положительными* $\alpha < a$ и $\beta < b$ (на неположительные БДД произведение распространяется по стандартному правилу «$-$» на «$-$» даёт «$+$»). Докажите, что эти определения корректны (т. е. нужные ТВГ существуют), дают для конечных a и b то же, что и раньше, и проверьте, что $a(b+c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

М14◇9 (корни). Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ конечных БДД β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2.