Простые числа и разложение на множители

Определение. Число $p\in\mathbb{Z}$ называется *простым*, если оно делится только на ±1 и $\pm p$.

М12◇1. Найдите все натуральные простые числа, которые одновременно представляются в виде суммы и в виде разности двух натуральных простых чисел.

М12◇2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

М12◇3. Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?

М12◇4*. Верно ли, что среди чисел вида **а)** $2^{2^k}-1$ **б)** $1\overbrace{00\ldots00}^{k}3$ **в)** $\overbrace{33\ldots33}^{k}1$ имеется бесконечно много составных?

М12◇5 (основное свойство простых чисел). Пусть $p\in\mathbb{Z}$ простое. Докажите, что $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$ произведение ab делится на p только если a или b делится на p. Бывают ли непростые числа p с таким свойством?

М12◇6. Пусть $p>0$ простое. Существуют ли $x,y\in\mathbb{N}: x^2=p\,y^2$?

М12◇7*. Существуют ли $n\geqslant1$ различных простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_n$ и рациональные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1\sqrt{p_1}+\lambda_2\sqrt{p_2}+\cdots+\lambda_n\sqrt{p_n}$ рационально[1]?

М12◇8 (факториальность $\mathbb{Z}$). Докажите, что любое целое число z можно представить в виде произведения $z=\pm p_1p_2p_3\cdots p_s$, в котором все сомножители суть натуральные простые числа (не обязательно разные), и любые два таких разложения (например, полученные разными способами) могут различаться *только порядком следования множителей*.

М12◇9. Разложите на простые множители все числа A, B из зад. М6◇7.

М12◇10. Сколько различных натуральных делителей у числа: **а)** 27; **б)** 35; **в)** 67500; **г)** $p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν — попарно разные простые).

М12◇11. Найдите все кратные 30 числа с ровно тридцатью натуральными делителями.

М12◇12*. Перечислите все $n\in\mathbb{N}$, имеющие не менее $\sqrt{n}$ натуральных делителей.

М12◇13. Вычислите $\varphi(n)$ для **а)** $n=36$ **б)** $n=p^k$ (p – простое) **в)** $n=p_1p_2p_3\cdots p_s$ **г*)** $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν попарно разные простые).

М12◇14* (теорема Вильсона). Чему равно произведение всех ненулевых чисел n-арифметики при простом и составном n? Верно ли, что натуральное число $p\geqslant2$ просто, если и только если оно делит $(p-1)!+1$?

М12◇15* (гомоморфизм Фробениуса). Пусть $p>0$ — простое. Верно ли, что в p-арифметике выполняется тождество $(a+b)^p=a^p+b^p$?

М12◇16* (малая теорема Ферма). Докажите, что для любого $a\in\mathbb{N}$ и простого p степень a^p имеет тот же остаток от деления на p, что и a.

М12◇17* (конечная геометрия). Пусть $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ — арифметика вычетов по модулю 5. Координатная плоскость $\mathbb{F}^2$ — это множество всех упорядоченных пар (x_1,x_2) с $x_1,\ x_2\in\mathbb{F}$. Прямая, проходящая через точку $q=(q_1,q_2)$ в направлении вектора $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2)$, — это множество всех точек вида $q+t\cdot\overrightarrow{v}=(\,q_1+tv_1\,,\,q_2+tv_2\,)$ со всевозможными $t\in\mathbb{F}$. Непересекающиеся прямые называются *параллельными*.

а) Нарисуйте все прямые, проходящие через начало координат. Сколько их?

б) Зависит ли число прямых, проходящих через заданную точку q, от выбора q?

в) Верно ли, что через любую пару различных точек проходит ровно одна прямая?

г) Справедлив ли в такой геометрии пятый постулат Евклида?

д) Верно ли, что множество точек $\{(x_1,x_2)\}$ составляет прямую, если и только если оно является множеством всех решений некоторого линейного уравнения $ax_1+bx_2=c$?

---

[1] в общем случае это *очень* трудная задача; обязательно попытайтесь, однако, решить её хотя бы для $n=1,2,3$