Арифметика вычетов

М11◇1 (остаток суммы и произведения). Пусть целые числа a и b имеют остатки α и β от деления на n. Какие статки от деления на n имеют числа: **а)** $a+b$ **б)** ab .

М11◇2. Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у **а)** 1998^{1999} **б)** $1998^{1999^{2000}}$.

М11◇3. Верно ли, что **а)** $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7? **б)** $2^{70}+3^{70}$ делится на 13?

М11◇4. Может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 от деления на 6? Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел от деления на 8?

М11◇5. Имеет ли уравнение $x^2+y^2+z^2=2\,xyz$ ненулевые решения в целых числах?

М11◇6. Верно ли, что: **а)** $a^2+b^2 \,\vdots\, 7 \Rightarrow a \,\vdots\, 7$ и $b \,\vdots\, 7$? **б*)** $a^3+b^3+c^3 \,\vdots\, 7 \Rightarrow abc \,\vdots\, 7$? **в*)** $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \,\vdots\, 9 \Rightarrow abcde \,\vdots\, 9$?

Арифметика вычетов по модулю 7 (или 7-*арифметика*) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ состоит из семи «чисел» — остатков от деления на 7 (мы будем обозначать их $[0]_7$, $[1]_7$, … , $[6]_7$). По определению, $[x]_7+[y]_7$ есть остаток от деления на 7 суммы $x+y$, а $[x]_7\cdot[y]_7$ — остаток произведения xy.

М11◇7. Составьте для 7-арифметики таблицы сложения и умножения и проверьте, что эти операции подчиняются обычным переместительному, сочетательному и распределительному законам. Дайте определение противоположного числа $-a$ и обратного числа a^{-1} к данному числу $a\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Составьте таблицы противоположных и обратных чисел. Справедливы ли в 7-арифметике тождества $(-1)\cdot a=-a$ и $(-a)\cdot(-b)=ab$?

М11◇8. Дайте определение n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и составьте таблицы сложения и умножения для 4-, 5-, 6- и 8-арифметик. Верно ли, что при умножении в n-арифметике
- **а)** у всех ненулевых чисел есть обратные **б)** «минус» на «минус» даёт «плюс»
- **в)** $a\neq 0$ и $b\neq 0 \Rightarrow ab\neq 0$ **г)** $ab=ac$ и $a\neq 0 \Rightarrow b=c$ **д)** $a\neq 0 \Rightarrow a^n\neq 0\ \forall\, n\geqslant 1$
- **е)** степени a^0, a^1, a^2, a^3, … любого $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ всегда «зацикливаются»?

М11◇9. Вычислите сумму всех чисел n-арифметики. Делится ли $1^3+2^3+\cdots+28^3$ на 29?

М11◇10 (позиционные признаки делимости). Вычислите остатки всех степеней десятки от деления на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7 и скажите, как, глядя на цифры десятичной записи данного числа (скажем, $\overline{abcdefghi}$) узнать, делится ли оно на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7?

М11◇11. У каких чисел 4-, 5-, 6- и 8-арифметик есть обратные (такие числа называются *обратимыми*)? Укажите эти обратные явно.

М11◇12. Докажите, что следующие свойства $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ попарно эквивалентны:
- **а)** a обратим; **б)** отображение умножения на a: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{x\mapsto ax}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ взаимно однозначно;
- **в)** $ax=0\Rightarrow x=0$; **г)** $ax=ay\Rightarrow x=y$; **д)** $\forall y\ \exists x\ :\ ax=y$; **е)** $\text{НОД}(a,n)=1$.

М11◇13*. Зафиксируем обратимое $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, изобразим все числа n-арифметики точками, и из каждой точки $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ проведём стрелку в точку ax. Верно ли, что на этой картинке:
- **а)** движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы?
- **б)** все циклические траектории имеют одинаковую длину?
- **в)** если цикл содержит обратимое число, то он весь состоит из обратимых чисел?
- **г)** все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину?

М11◇14* (теорема Эйлера). *Функция Эйлера* φ сопоставляет каждому натуральному $n\geqslant 2$ количество $\varphi(n)$ обратимых чисел в n-арифметике. Используя предыдущую задачу, докажите, что для любых взаимно простых $a,b\in\mathbb{N}$ число $a^{\varphi(b)}$ имеет остаток 1 от деления на b.