Как сравнивать множества

По пыльной тропинке далёкой планеты бредёт стадо семиногих пятихвосток. Сколько ног приходится на каждую сотню хвостов?

Прообразы. Пусть задано отображение $A \xrightarrow{f} B$, и $b \in B$. Множество $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \subset A$ называется *полным прообразом* b, а его элементы — *прообразами* b. У разных $b \in B$ может быть разное число (в том числе и нуль) прообразов. Если каждый $b \in B$ имеет ровно m прообразов, то отображение f называется *m-листным накрытием*[1].

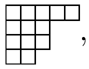
М9◇1°. Как изменятся ответы в зад. М7◇3, если букву о и букву к обе заменить буквой ы?

М9◇2. Сколько слов можно получить переставляя буквы в словах: **а)** курок, **б)** СССР, **в)** колобок, **г)** рефрижератор, **д)** $\underbrace{\text{аа}\ldots\text{а}}_{\alpha}\underbrace{\text{бб}\ldots\text{б}}_{\beta}$, **е)** $\underbrace{a_1a_1\ldots a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2\ldots a_2}_{m_2}\ldots\underbrace{a_ka_k\ldots a_k}_{m_k}$?

М9◇3. Сколько имеется одночленов степени d от **а)** двух **б)** трёх **в)** n переменных?

М9◇4. Сколько получится слагаемых, если тупо раскрыть скобки у $(a+b+c)^3$? Какие одночлены и с какими коэффициентами останутся после приведения подобных?

М9◇5. Те же вопросы про $(a_1 + \cdots + a_m)^d$. Цело ли число $1000!/10!^{100}$?

Диаграмма Юнга — это картинка типа , состоящая из выровненных по левому краю горизонтальных клеточных полосок, длина которых сверху вниз не возрастает.

М9◇6. Между какими из перечисленных ниже множеств имеется изоморфизм? Постройте эти изоморфизмы явно. Сколько элементов в каждом множестве?

а) значки, которые можно высвечивать, зажигая ровно 12 лампочек на прямоугольном табло, имеющем 5 рядов по 4 лампочки в каждом;

б) способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам;

в) слова, которые получаются при перестановке букв в слове аааааааабббббббббббб;

г) маршруты из зад. М7◇12, приводящие шарик в 12-ю комнату на 20-м этаже (этажи и комнаты нумеруются сверху вниз и слева направо, начиная с нулевого номера);

д) одночлены a^8b^{12}, которые получатся если тупо раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные слагаемые;

е) диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

М9◇7. Имеется 5 разноцветных чашек, 7 разноцветных соломинок, 4 одинаковых стакана и 6 одинаковых кусков сахара. Сколькими способами можно разложить[2]: **а)** сахар по чашкам? **б)** соломинки по чашкам? **в*)** сахар по стаканам? **г*)** соломинки по стаканам?

М9◇8. Как изменятся ответы в зад. М9◇7, если запретить пустые ёмкости?

Группа симметрий. Набор G взаимно однозначных отображений $M \xrightarrow{g} M$ некоторого множества M в себя называется *группой симметрий*, если композиции $f \circ g$ любых двух преобразований из G и обратные преобразования g^{-1} к любым преобразованиям из G также лежат[3] в G. Множество всех элементов, которые можно получить из данного элемента $m \in M$, действуя на него всевозможными преобразованиями из G, называется *G-орбитой* элемента m.

М9◇9. Пусть на конечном множестве M действует группа симметрий G, и $m \in M$. Докажите, что все преобразования из G, оставляющие m на месте, тоже образуют группу, и отношение числа элементов в G к числу таких преобразований равно длине G-орбиты m.

М9◇10. Грани **а)** кубика **б)** тетраэдра раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные грани — в разные цвета). Сколько разных игрушек получится?

М9◇11*. Сколько разных игрушек получится, если в предыдущей задаче склеивать крашеные **а)** кубики **б)** тетраэдры по два грань к грани?

---

[1] в частности, однолистные накрытия — это в точности взаимно однозначные отображения

[2] две раскладки одинаковы, если они получаются друг из друга передвиганием ёмкостей по столу без изменения их содержимого.

[3] обратите внимание, что G автоматически содержит тождественное преобразование Id_M, оставляющее каждый элемент $m \in M$ на месте