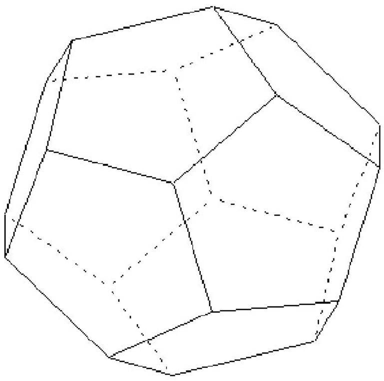
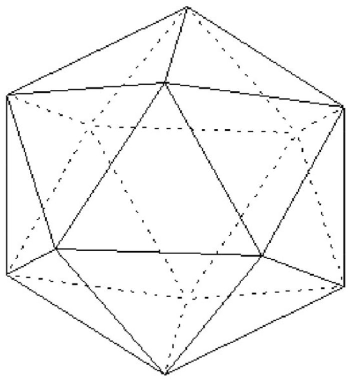
Симметрии и перестановки.

M9$\frac{3}{4}\diamond$1. На плоскости заданы прямые $\ell_1 \neq \ell_2$. Сделаем симметрию относительно ℓ_1, потом — относительно ℓ_2. Что за движение в результате получится, если **а)** $\ell_1 || \ell_2$? **б)** $\ell_1 \nparallel \ell_2$?

M9$\frac{3}{4}\diamond$2. Сколько разных бус можно сделать из 5 красных, 7 синих и 11 белых одинаковых бусинок?



додекаэдр



икосаэдр

M9$\frac{3}{4}\diamond$3. Стороны плоского проволочного правильного n-угольника раскрашивают в n разных цветов (разные в разные). Сколько разных игрушек получится?

M9$\frac{3}{4}\diamond$4. Сколько всего имеется разных вращений, совмещающих с собою заданный правильный **а)** куб? **б)** тетраэдр? **в)** октаэдр? **г*)** додекаэдр? **д*)** икосаэдр?

Перестановка — это биективное отображение $N \xrightarrow{\sigma} N$ из конечного множества N в себя. Если обозначить элементы конечного множества числами $\{1,\, 2,\, \dots\, ,\, n\}$, то их перестановку можно записывать строчкой $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ в которой $\sigma_i = \sigma(i)$. Тождественная перестановка $(1,\, 2,\, \dots\, ,\, n)$ (оставляющая все элементы на месте) обозначается Id. Все перестановки n-элементного множества образуют группу, которая называется *группой перестановок* (или *симметрической группой*) и обозначается $\mathfrak{S}_n$. Перестановка, при которой какие-то m элементов $i_1, i_2, \dots, i_m \in N$ (с произвольными номерами) переставляются по кругу: $i_1 \longmapsto i_2 \longmapsto i_3 \longmapsto \ \cdots \ \longmapsto i_{m-1} \longmapsto i_m \longmapsto i_1$, а все остальные элементы остаются на месте, называется *циклом* длины m. Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Перестановка σ, такая что $\sigma\circ\sigma = \mathrm{Id}$, называется *отражением* (например, любая транспозиция является отражением).

M9$\frac{3}{4}\diamond$5°. Всякая ли перестановка является композицией **а)** непересекающихся циклов? **б)** (возможно пересекающихся) транспозиций?

M9$\frac{3}{4}\diamond$6°. Для любой ли перестановки σ существует k, такое что $\sigma^k \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\sigma\circ\sigma\circ\ \dots\ \circ\sigma}^{k} = \mathrm{Id}$?

M9$\frac{3}{4}\diamond$7. Всякое ли отражение является композицией непересекающихся транспозиций?

M9$\frac{3}{4}\diamond$8. Разложите произвольный цикл в композицию двух отражений.

M9$\frac{3}{4}\diamond$9. Пусть перестановка σ получается композицией m_1 циклов длины 1, m_2 циклов длины 2, m_3 циклов длины 3, … , m_k циклов длины k, причём все циклы не пересекаются. Сколько всего имеется таких перестановок?

M9$\frac{3}{4}\diamond$10 (чётность перестановки). Скажем, что в перестановке $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ элементы σ_k и σ_m образуют *инверсную пару*, если $k < m$, но $\sigma_k > \sigma_m$. Пусть перестановка σ является композицией t транспозиций. Докажите, что чётность t совпадает с чётностью числа инверсных пар[1]. Что происходит с чётностями при взятии композиций?

M9$\frac{3}{4}\diamond$11. Найдите чётность перестановки $(n,\, (n-1),\, \dots\, ,\, 1)$.

M9$\frac{3}{4}\diamond$12. Найдите чётность «тасующей перестановки» $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой каждый из двух наборов номеров $\{i_\nu\}, \{j_\mu\} \subset \{1,\, 2,\, \dots\, ,\, n\}$ возрастает слева направо.

M9$\frac{3}{4}\diamond$13. Какие перестановки четырёх **а)** вершин тетраэдра **б)** диагоналей куба можно получить вращениями этих фигур?

M9$\frac{3}{4}\diamond$14*. Какой-то шалун выковырял из игры «пятнадцать» фишки «1» и «2» и засунул их обратно, поменяв местами. Удастся ли вернуть такую позицию в исходное положение, следуя правилам игры?

[1]в частности, зависит только от самой перестановки, а не от выбора разложения в композицию транспозиций