Разные задачи о графах

М$9\frac{2}{3}\diamond$1 (формула Эйлера). Всегда ли $в - р + г = 2$ в плоском связном графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями? Справедливо ли это равенство для вершин, рёбер и граней произвольного выпуклого многогранника[1]?

М$9\frac{2}{3}\diamond$2. Можно ли нарисовать на сфере полный граф с пятью вершинами, чтобы его рёбра не пересекались?

М$9\frac{2}{3}\diamond$3*. Как изменится формула Эйлера, если граф с непересекающимися рёбрами нарисован не на сфере, а на

а) крендели (т. е. «сфере с 2 ручками», см. рис. $9\frac{2}{3}$ - 1)

б) торе («сфере с ручкой») **в*)** сфере с g ручками?

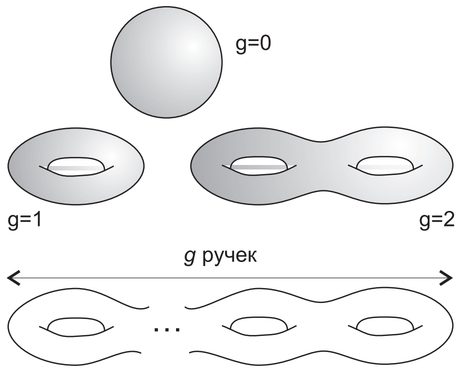

Рис. $9\frac{2}{3}$ - 1. Сферы с ручками.

М$9\frac{2}{3}\diamond$4. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и проложить попарно непересекающиеся тропинки от каждого дома к каждому колодцу?

М$9\frac{2}{3}\diamond$5. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют отрезками любые две из ещё не соединённых точек так, чтобы эти отрезки не пересекались нигде кроме отмеченных точек. Тот, кто не может сделать ход, — проиграл. Зависит ли исход этой игры от того, как ходят соперники?

М$9\frac{2}{3}\diamond$6*. Трёхзначный кодовый замок откроется как только будут последовательно набраны три правильные цифры подряд (вне зависимости от того, какие цифры набирались до этого). Можно ли, набирая по одной цифре в секунду, открыть такой замок за 17 минут?

М$9\frac{2}{3}\diamond$7. В некой компании поровну юношей и девушек и каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что всех их можно переженить друг на друге в рамках этих знакомств.

***k*-дольные графы.** Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром. Граф называется *k-дольным*, если правильная раскраска его вершин возможна k цветами и не меньше.

М$9\frac{2}{3}\diamond$8. Равносильна ли двудольность отсутствию циклов нечётной длины?

М$9\frac{2}{3}\diamond$9. В любом ли k-дольном графе есть путь из ровно k разноцветных вершин?

М$9\frac{2}{3}\diamond$10. Существует ли граф с n вершинами $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и n рёбрами $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, такими что A_i соединяется ребром с A_j тогда и только тогда, когда b_i и b_j выходят из одной вершины? Если да, то какова степень каждой вершины?

М$9\frac{2}{3}\diamond$11. Города страны соединены $k \cdot m$ прямыми авиалиниями, и некие m юридических лиц вознамерились прихватизировать ровно по k линий, однако антимонопольная служба зорко следит за тем, чтобы ни в одном из городов ни одному лицу не досталось бы сразу две линии, выходящие из этого города. Возможно ли осуществить такую прихватизацию?

М$9\frac{2}{3}\diamond$12. В кубической коробке $n \times n \times n$ лежали n^3 единичных кубиков. Кубики высыпали, каждый просверлили по диагонали, затем все плотно нанизали на нить и связали в кольцо (соединили вершину первого кубика с вершиной последнего). При каких n получившееся «ожерелье» можно обратно убрать в коробку?

М$9\frac{2}{3}\diamond$13*. В гости ожидается либо n, либо m человек, причём $\text{НОД}(n, m) = 1$. На какое минимальное число секторов нужно разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как n, так и m одинаковых кусков?

М$9\frac{2}{3}\diamond$14*. Всегда ли среди 50 человек найдутся двое с чётным (возможно, нулевым) числом общих знакомых среди 48 остальных?

[1] который есть не что иное, как связный граф с непересекающимися рёбрами, нарисованный на сфере