Знакомьтесь, граф ...

Граф — это конечное множество точек на плоскости (*вершин графа*), некоторые из которых соединены отрезками (*рёбрами графа*). Количество рёбер, выходящих из данной вершины A, называется *степенью* (или *валентностью*) этой вершины и обозначается $\deg A$.

М$9\frac{1}{2}\diamond$1 (лемма о рукопожатиях). Выразите сумму степеней всех вершин произвольного графа через общее число его рёбер.

М$9\frac{1}{2}\diamond$2. В любом ли графе с более чем одной вершиной есть пара вершин одинаковой степени?

М$9\frac{1}{2}\diamond$3. Все 28 Петиных одноклассников имеют по различному числу друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

М$9\frac{1}{2}\diamond$4 (уроки демократии - 1). Каждый из 450 думцев врезал по физиономии ровно одному своему коллеге. Наберётся ли 150 думцев, из которых никто никого по лицу не бил?

М$9\frac{1}{2}\diamond$5* (теорема Холла). Известно, что для любой компании присутствующих на балу кавалеров можно указать не меньшую по численности стайку барышень, каждая из которых незнакома хотя бы с одним кавалером из этой компании. Могут ли все присутствующие на балу кавалеры одновременно танцевать вальс с незнакомыми барышнями?

Путь в графе — это последовательность его вершин $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и рёбер $[A_1, A_2]$, …, $[A_n, A_{n+1}]$, соединяющих соседние вершины в этой последовательности; число n называют *длиной* пути. Если все рёбра пути различны и начальная вершина совпадает с конечной: $A_1 = A_{n+1}$, то путь называют *циклом*. Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём. Связный граф без циклов называется *деревом*.

М$9\frac{1}{2}\diamond$6°. Нарисуйте какое-нибудь дерево. Пусть между любыми двумя вершинами графа имеется ровно один путь из неповторяющихся рёбер. Является ли это условие

а) необходимым **б)** достаточным для того, чтобы граф был деревом?

М$9\frac{1}{2}\diamond$7°. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

М$9\frac{1}{2}\diamond$8° (остовы). Всегда ли из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево с тем же множеством вершин, что и исходный граф[1]?

М$9\frac{1}{2}\diamond$9* (теорема Кели). Докажите, что полный[2] граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

М$9\frac{1}{2}\diamond$10°. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным?

М$9\frac{1}{2}\diamond$11. Могут ли степени всех вершин несвязного n-вершинного графа быть $\geqslant (n-1)/2$?

М$9\frac{1}{2}\diamond$12. Из столицы выходит 101 авиалиния, из г. Дальний — одна, а из остальных городов — по 100. Можно ли, пусть с пересадками, долететь из столицы в Дальний?

М$9\frac{1}{2}\diamond$13 (эйлеровы графы). Докажите, что в связном графе тогда и только тогда есть цикл, проходящий ровно один раз по каждому рёбру, когда степени всех вершин чётны.

Плоские графы — это графы, рёбра которых не пересекают друг друга нигде кроме вершин. Части, на которые делит плоскость такой граф, называются *гранями графа*.

М$9\frac{1}{2}\diamond$14. Докажите, что грани плоского графа тогда и только тогда раскрашиваются в два цвета так, чтобы грани с общим ребром получались разноцветными, когда этот граф эйлеров (см. зад. М$9\frac{1}{2}\diamond$13).

М$9\frac{1}{2}\diamond$15. Многоугольник разрезают на треугольники непересекающимися (нигде кроме вершин) диагоналями. Может ли при этом получиться меньше двух треугольников с парой сторон, бывших сторонами исходного многоугольника?

---

[1] такое дерево называется *остовом* графа

[2] граф называется *полным*, если любая его вершина соединена с любой другой ровно одним ребром