Множества и отображения

(памятка начинающему пользователю)

Понятие *множества* в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а как «нечто, удовлетворяющий аксиомам» (этот список *аксиом теории множеств* мы пока не будем уточнять). Как *прямая* и *точка* формализуют известные пространственные образы, так *множества* формализуют житейские представления о совокупностях предметов произвольной природы. Множество состоит из *элементов*. Элементы могут быть любые: числа, стулья, другие множества... Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$. Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Все элементы в любом множестве, по определению, *различны*. Множество задано, как только про любой объект можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент $a \in A$ лежит также и в B. Для любых двух множеств A и B множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, которые не содержатся в B, называется их *разностью*.

М8◇1. Сколько всего подмножеств у множества, содержащего n элементов?

М8◇2. Какие из перечисленных ниже свойств справедливы для любых множеств A, B и C:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ **б)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

в) $A \cup C = B \cup C \;\Rightarrow\; A = B$ **г)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

д) $A \setminus C = B \setminus C \;\Rightarrow\; A = B$ **е)** $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

ж) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **з)** $A \cap C = B \cap C \;\Rightarrow\; A = B$

М8◇3. Выражаются ли:

а) пересечение через разность? **б)** разность через пересечение и объединение?

Отображение $A \xrightarrow{f} B$ из множества A в множество B — это правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ *ровно один* элемент $f(a) \in B$, зависящий от a и называемый *образом* a. Подмножество $f(A) \subset B$, состоящее из образов элементов множества A, называется *образом* отображения f. Отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $A \xrightarrow{g} B$ *равны*, если $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$. Отображение $B \xrightarrow{g} A$ называется *обратным* к отображению $A \xrightarrow{f} B$, если $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ и одновременно $f(g(y)) = y \quad \forall b \in B$. В этой ситуации отображения f и g называют *обратимыми* и пишут $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$. Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *отображением «на»* (или *сюръективным*, или *эпиморфным*, или *наложением*), если у каждого элемента $b \in B$ есть прообраз в A, т. е. $f(A) = B$. Отображение называется *отображением «в»* (или *инъективным*, или *мономорфным*, или *вложением*), если никакие два элемента из A не переходят в один и тот же элемент B, т. е. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение, являющееся одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (или *изоморфизмом*, или *биекцией*).

М8◇4°. Нарисуйте все отображения **а)** $\{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1\}$; **б)** $\{0,1\} \longrightarrow \{0,1,2\}$. Сколько среди них сюрьективных и сколько инъективных?

М8◇5°. Из отображений: $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{Z}$ (с $p \in \mathbb{Z}$); $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{R}$ (с $p \in \mathbb{R}$) выберите все **а)** биекции, **б)** инъекции, **в)** сюръекции.

М8◇6. Сколько всего имеется отображений из m-элементного множества в n-элементное?

М8◇7. Сколько среди них инъективных?

М8◇8°. Равносильна ли взаимная однозначность обратимости?

М8◇9°. Достаточно ли для того, чтобы f было обратно к g, только одного условия

а) $f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$? **б)** $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$?

М8◇10. Некое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: чётных или нечётных?

М8◇11. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше: с периметром 2005 или 2008?