Как организовать полный перебор

Чтобы управиться с классом, его надо выстроить по росту и перекликнуть по алфавиту.
(из Школьных Заповедей)

М7◇1. Сколько различных **а)** двух- **б)** трёх- **в)** четырёх- **г)** n-буквенных слов[1] можно написать тридцатью тремя буквами русского алфавита?

М7◇2. Можно ли закодировать русский алфавит азбукой Морзе так, чтобы каждая буква передавалась не более, чем четырьмя сигналами? Какое число сигналов на символ достаточно отводить для передачи 3000 различных иероглифов?

М7◇3. Сколько всего разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах `ОК, рок, урок, шнурок`?

М7◇4. Как изменится ответ в зад. М7◇1, если потребовать, чтобы буквы не повторялись?

М7◇5. Можно ли упорядочить все сто двухразрядных чисел от 00 до 99 так, чтобы каждые два соседних числа отличались ровно в одной цифре, причём ровно на единицу? Тот же вопрос про трёх- и n-разрядные числа.

Факториалы. Произведение $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ обозначается $n!$ (читается «n-факториал»). По определению, $\boxed{0! = 1! = 1}$.

М7◇6. При каких n: **а)** $n! \geqslant 3^n$; **б)** $2^n \geqslant n^3$?

Математическая индукция — это способ доказать бесконечную серию занумерованных утверждений за два хода: **(1)** – *база индукции* – доказывается утверждение №1 ; **(2)** – *индуктивный переход* – доказывается, что $\forall N \in \mathbb{N}$ из утверждения №N вытекает утверждение №$(N+1)$.

М7◇7. Верно ли, что при разрезании выпуклого n-угольника на треугольники по диагоналям число получившихся треугольников будет одним и тем же, как бы не резали? Чему оно может равняться? Какова сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

М7◇8. На сколько кусков разбивается плоскость n прямыми, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны?

М7◇9. Всегда ли плоскость, разбитая на части прямыми и окружностями, раскрашивается в два цвета так, чтобы имеющие общую сторону куски были разноцветными?

М7◇10*. Даны n точек. Верно ли, что они либо лежат на одной прямой, либо среди прямых, соединяющих пары этих точек, имеется не менее n разных?

М7◇11. Сколько разных m-буквенных слов можно написать n-буквенным алфавитом, если буквы в словах **а)** могут **б)** не могут повторяться?

М7◇12. В бесконечный лабиринт на рис. 7 - 1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

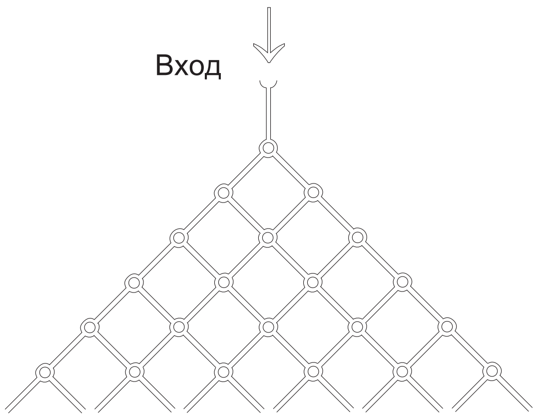

Рис. 7 - 1. Лабиринт Паскаля.

М7◇13. Для $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в $(1+x)^k$ и $(a+b)^k$. Сформулируйте и докажите теорему, сравнивающую полученные ответы с ответами зад. М7◇12.

М7◇14. Число $x + 1/x$ является целым. Будет ли целым $x^n + 1/x^n$? (Начните с $n = 2, 3, \dots$)

[1] слова не обязаны быть осмысленными и буквы в словах могут повторяться