Делимость и взаимная простота

Прошу — забудь всё, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.
(Э. Ландау, «Основы анализа», М., «ИЛ», 1947, стр. 8, п. 3)

В решениях задач этого листка словосочетания «простое число» и «простые множители» запрещены.

М6◇1°. Какое наименьшее расстояние можно отложить на прямой от заданной точки, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины **а)** 13 *см* и 29 *см*; **б)** 21 *см* и 30 *см*?

М6◇2°. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ — два фиксированных целых числа. Обозначим через $I = I(a, b) \subset \mathbb{Z}$ множество всех ℓ, которые можно отложить на числовой прямой от нуля, используя шаблоны a и b (иначе I можно описать[1] как множество всех чисел, представимых в виде $\ell = k\,a + m\,b$ с целыми k и m). Пусть d — наименьшее положительное число в I. Верно ли, что:

а) a, b, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из I лежат в I?

б) $I(a \pm mb, b) = I(a, b) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$? **в)** все числа из I (в частности, a и b) делятся на d?

г) все числа из I (в частности, d) делятся на любой общий делитель чисел a и b?

НОД и НОК. Наибольшее натуральное число, делящее каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{нод}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Аналогично, наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из a_i, называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{нок}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

М6◇3. Рассуждая как в зад. М6◇2, покажите, что $\text{нод}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ делится на любой общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и представляется в виде $z_1a_1 + z_2a_2 + \cdots + z_na_n$ с $z_\nu \in \mathbb{Z}$.

М6◇4. Верно ли, что $\text{нок}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ нацело делит любое общее кратное чисел a_i и что $\text{нок}(a, b) \cdot \text{нод}(a, b) = a \cdot b$?

М6◇5°. Верно ли, что $\text{нод}(a \pm mb, b) = \text{нод}(a, b) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$?

М6◇6 (алгоритм Евклида). Пусть $a > b$ — два фиксированных натуральных числа. Определим последовательность чисел $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ правилами: $r_0 = a$, $r_1 = b$, а при $k \geqslant 2$ $r_k =$ (остатку от деления r_{k-2} на r_{k-1}). Докажите, что все числа r_ν лежат в множестве I из зад. М6◇2 и монотонно убывают до тех пор, пока очередное $r_{\nu+1}$ не обратится в нуль (т. е. пока $r_{\nu-1}$ не разделится нацело на r_ν). Как связано это последнее ненулевое r_ν с $\text{нод}(a, b)$?

М6◇7°. Вычислите $\text{нод}(a, b)$ и подберите целые x, y так, чтобы $x\,a + y\,b = \text{нод}(a, b)$, для следующих пар (a, b): **а)** $(17, 13)$; **б)** $(44\,863, 70\,499)$; **в)** $(8\,385\,403, 2\,442\,778)$.

Взаимная простота. Если $\text{нод}(a, b) = 1$ для $a, b \in \mathbb{Z}$, то числа a, b называются *взаимно простыми*.

М6◇8. Какие из перечисленных ниже условий необходимы, а какие достаточны для взаимной простоты a и b: **а)** $\exists\, x, y \in \mathbb{Z} : a\,x + b\,y = 1$ **б)** $\forall\, z \in \mathbb{Z} \;\exists\, k, m \in \mathbb{Z} : ka + mb = z$.

М6◇9. Пусть целые a, b, c таковы, что c взаимно просто с a, а b – любое. Верно ли, что:

а) если произведение ab делится на c, то b делится на c?

б) если b делится как на a, так и на c, то b делится и на произведение ac?

М6◇10. Верно ли, что несократимая дробь p/q (где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) может быть корнем многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, только если a_0 делится на q и одновременно a_n делится на p?

М6◇11. Верно ли, что частные $\text{нок}(a, b) : a$ и $\text{нок}(a, b) : b$ взаимно просты $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$?

М6◇12°. Всегда ли взаимно просты a и $a + 1$? Верно ли, что $\forall\, a \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $b \in \mathbb{N}$, таких что $b + a$ и $b - a$ взаимно просты?

М6◇13. Найдите *все* целые решения уравнений: **а)** $1537\,x + 1387\,y = 1$ **б)** $5\,x + 7\,y = 11$ **в)** $26\,x + 32\,y = 60$ **г)** $169\,x + 221\,y = 26$ **д)** $28\,x + 30\,y + 31\,z = 365$

М6◇14. Чему равно 91-е натуральное число, одновременно дающее остатки:

а) 2 и 7 от деления, соответственно, на 57 и 179? **б)** 1, 2, 3 от деления на 2, 3, 5?

в) 2, 4, 6, 8 от деления на 5, 9, 11, 14?

[1] множество $I(a, b)$ иногда называют *идеалом*, порождённым a и b