Площади и координаты

M5◇1°. Нарисуйте на клетчатой бумаге оси координат и отметьте точки $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(2,5)$, $E(0,5)$, $F(-7,7)$, $G(-5,4)$. Чему равны (в клеточках) площади многоугольников: **а)** CED **б)** ADE **в)** AEC **г)** ECG **д)** $ABDE$ **е)** $GCEF$ **ж)** $ACEFG$?

M5◇2. Верно ли, что площадь любого квадрата с вершинами в узлах клетчатой бумаги измеряется целым числом клеток?

M5◇3°. Отметьте на координатной клетчатой бумаге точки $O(0,0)$ и $A(4,3)$, достройте отрезок OA до квадрата, вычислите площадь этого квадрата и найдите длину $|OA|$.

M5◇4. Найдите квадрат расстояния от начала координат до произвольной точки $P(p_1,p_2)$.

M5◇5. Вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(1,5)$, $B(-3,2)$, $C(4,-1)$. Найдите: **а)** координаты вершины D **б)** $S(ABCD)$ **в)** длины сторон **г)** длины высот.

M5◇6* (формула Пика). Пусть $\mathfrak{M}$ — не обязательно выпуклый, но несамопересекающийся многоугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Сравните площадь $S = S(\mathfrak{M})$ (в клеточках) с числом $\Pi = \Pi(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{число узлов внутри } \mathfrak{M}) + \frac{1}{2}(\text{число узлов на границе } \mathfrak{M}) - 1$. Для этого выясните, справедливы ли равенства:

а) $\Pi(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M}_1) + \Pi(\mathfrak{M}_2)$ для многоугольника $\mathfrak{M}$, разрезанного прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (тоже с вершинами в узлах клеток);

б) $\Pi = S$ для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям клеток;

в) $\Pi = S$ для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям клеток;

г) $\Pi = S$ для любого треугольника; **д)** $\Pi = S$ для любого выпуклого многоугольника;

е) $\Pi = S$ в общем случае.

Вектор — это параллельный перенос. Вектор задаётся стрелкой, причём две стрелки тогда и только тогда задают один и тот же вектор, когда они сами получаются друг из друга некоторым параллельным переносом. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, переводящего $A(a_1,a_2)$ в $B(b_1,b_2)$, называется пара чисел $\big((b_1-a_1),(b_2-a_2)\big)$, т. е. величины сдвигов вдоль координатных осей при этом переносе. Векторы можно складывать и умножать на числа (подумайте или вспомните как).

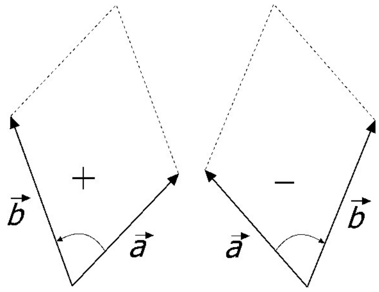

Рис. 5 - 1.

M5◇7. В $\triangle\ ABC$ на стороне AB взяли точку P, а на отрезке CP — точку Q, так что $|AP| : |PB| = 2 : 1$ и $|CQ| : |QP| = 3 : 5$. Выразите **а)** $\overrightarrow{AB}$ **б)** $\overrightarrow{QC}$ **в)** $\overrightarrow{BQ}$ **г)** $\overrightarrow{AQ}$ через векторы $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$.

Ориентированная площадь. Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ (см. рис. 5 - 1), взятая со знаком «плюс», если кратчайший поворт, совмещающий направление $\overrightarrow{a}$ с направлением $\overrightarrow{b}$, происходит против ЧС, и со знаком «минус» — если против ЧС, обозначается через $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ и называется *ориентированной* площадью. Отметим, что равенство $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$ равносильно пропорциональности векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (т. е. равенству $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$ для некоторого числа λ).

M5◇8°. Выразите через $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ ориентированные площади: **а)** $\delta(3\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ **б)** $\delta(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$ **в)** $\delta(-\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ **г)** $\delta(2\overrightarrow{a}, -5\overrightarrow{b})$ **д)** $\delta(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$ **е)** $\delta(\overrightarrow{a}+10\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$ **ж)** $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}-2005\overrightarrow{a})$

M5◇9. Докажите[1], что $\delta(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = \delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \delta(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$.

M5◇10. Выразите[2] $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ через координаты векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

M5◇11. В параллелограмме $OPQR$ известны координаты вершин $O(0,0)$, $P(p_1,p_2)$ и $R(r_1,r_2)$. Найдите его площадь и площадь $\triangle\ OPR$.

M5◇12. Выясните как относится площади $\triangle\ PBQ$ и $\triangle\ AQC$ из зад. M5◇7.

[1] подсказка: покажите, что либо $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{b}$, либо $\overrightarrow{a} = \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$ и отдельно рассмотрите эти два случая

[2] подсказка: верно ли, что $\delta(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}, \varepsilon\overrightarrow{e}+\varphi\overrightarrow{f}) = \alpha\varepsilon\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}) + \alpha\varphi\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{f}) + \beta\varepsilon\delta(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{e}) + \beta\varphi\delta(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{f})$?