Разрезания и площади

Свойства площадей. Многие плоские фигуры $\mathfrak{F}$ имеют площадь $S(\mathfrak{F})$. Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Площади равных фигур равны. Фигуры равной площади называются *равновеликими*. Если фигура $\mathfrak{F}$ разрезана прямолинейным разрезом на две части $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, и из трёх фигур $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ какие-то две имеют площадь, то её имеет и третья, причём $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F}_1) + S(\mathfrak{F}_2)$. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно конечным числом прямолинейных разрезов разбить на части, из которых складывается другая фигура. Площади равносоставленных фигур равны.

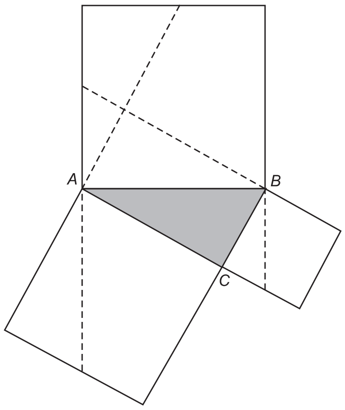

Рис. 4 - 1.

М4◇1 (теорема Пифагора – 1). Равносоставлен ли квадрат гипотенузы пифагоровых штанов на рис. 4 - 1 сумме квадратов катетов?

М4◇2 (теорема Пифагора – 2). Докажите, что отрезки a, b, c на рис. 4 - 2 тогда и только тогда образуют прямоугольный треугольник[1], когда $c^2 = a^2 + b^2$.

М4◇3. Дан прямоугольный $\triangle\, ABC$. Равносоставлен ли:

а) квадрат его высоты (см. рис. 4 - 4) прямоугольнику, стороны которого — отрезки, на которые высота разбивает гипотенузу.

б) квадрат его катета (см. рис. 4 - 3) прямоугольнику, стороны которого — гипотенуза и её отрезок, заключённый между высотой и этим катетом.

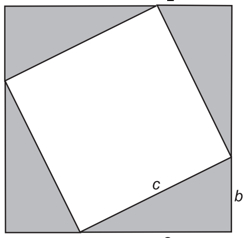

Рис. 4 - 2.

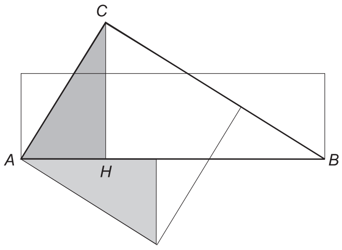

Рис. 4 - 3.

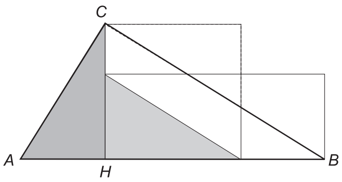

Рис. 4 - 4.

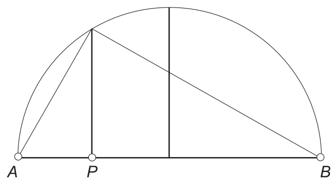

Рис. 4 - 5.

М4◇4. В прямоугольном $\triangle\, ABC$ AB — гипотенуза, CH — высота. Верно ли, что:

а) $|AH| : |CH| = |CH| : |HB|$ **б)** $|AH| : |AC| = |AC| : |AB|$ **в)** $|BH| : |CB| = |CB| : |AB|$

М4◇5. Циркулем и линейкой постройте арифметическое и геометрическое средние двух отрезков $a = AP$ и $b = PB$ (см. рис. 4 - 5). Докажите, что геометрическое среднее двух положительных чисел не превосходит арифметического, и опишите все случаи их равенства.

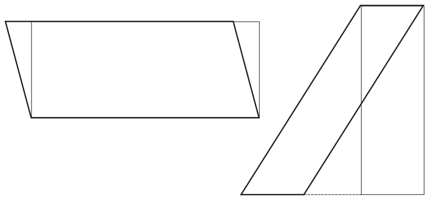
Рис. 4 - 6.

М4◇6. Даны отрезок длины 1 и отрезок длины a. Циркулем и линейкой постройте отрезок, длина которого равна:
а) $\sqrt{3}$ **б)** $\sqrt{19}$ **в)** $\sqrt{a}$ **г)** a^2.

М4◇7. Даны отрезки длины 1, p и q. Циркулем и линейкой постройте корни уравнений: **а)** $x^2 + px - q = 0$ **б)** $x^2 - px - q = 0$.

М4◇8. Циркулем и линейкой постройте квадрат, площадь которого относится к площади данного квадрата как $m : n$ (отрезок длины 1 *не задан*).

М4◇9. Равновелики ли параллелограммы на рис. 4 - 6 соответствующим прямоугольникам? Выразите площадь: **а)** параллелограмма **б)** треугольника **в)** трапеции через их основания и высоты.

М4◇10. Стороны выпуклого четырёхугольника равны (по часовой стрелке) a, b, c, d. Может ли его площадь быть больше: **а)** $(ab + cd)/2$ **б)** $(ac + bd)/2$?

М4◇11. Может ли у треугольника с высотами h_1, h_2, периметром P и площадью S быть:
а) $P > 1\,м$, $S < 1\,см^2$ **б)** $P < 1\,см$, $S > 1\,м^2$ **в)** $h_1 \geqslant 1\,м$, $h_2 \geqslant 1\,м$, $S \leqslant 1\,см^2$.

М4◇12. Зависит ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон от положения этой точки?

---
[1]кстати, единственен ли (если существует) треугольник, складывающийся из трёх данных отрезков?