# Геометрические прогрессии

*В банке живут бактерии и каждый день их число удваивается, так что за неделю банка заполняется бактериями целиком. За сколько дней бактерии заполнят полбанки?*

**М3◇1°.** Кто из участников в диалога[1] ближе к истине: ПРЕМЬЕР (ДОКЛАДЫВАЕТ): …чтобы выполнить поставленную президентом задачу об удвоении ВВП за 10 лет, необходимо каждый год увеличивать ВВП на 7%… ПРЕЗИДЕНТ (ПОПРАВЛЯЕТ С МЕСТА): Не на 7, а на 10…

**Геометрическая прогрессия** — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел $g_k$, в которой отношение двух соседних чисел $g_k : g_{k-1}$ одинаково для всех $k$ и отлично от 0 и 1. Это отношение называется *знаменателем* прогрессии и обычно обозначается через $q$. Если положительные числа $k$, $\ell$, $m$ удовлетворяют соотношению $m : \ell = \ell : k$, то $\ell$ называется *средним геометрическим* $k$ и $m$.

**М3◇2°.** Будет ли геометрической прогрессией последовательность, $k$-тый член которой равен: **а)** $0,\underbrace{0\dots0}_{k}3$; **б)** $3^{-k}$; **в)** $\underbrace{33\dots3}_{k}$; **г)** $\sqrt[k]{3}$; **д)** $g'_k \cdot g''_k$, где $g'_k$, $g''_k$ – геометрические прогрессии; **е)** $t^{a_k}$, где $t \neq 0, 1$ — фиксированное число, а $a_k \in \mathbb{Z}$ образуют арифметическую прогрессию.

**М3◇3.** Можно ли разбить $\mathbb{N}$ в объединение **а)** конечного **б)** бесконечного набора попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий?

**М3◇4.** Докажите, что дробь $(a^m - b^m) : (a - b)$ сокращается до многочлена от $a$, $b$ и найдите его явно. Можно ли сказать что-нибудь аналогичное про дробь $(a^m + b^m) : (a + b)$?

**М3◇5.** Вычислите сумму $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ и выразите сумму произвольной конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

**М3◇6.** Найдите суммы: **а)** $1+2\,q+3\,q^2+\dots+(n+1)\,q^n$ **б)** $1\cdot2+2\cdot3\,q+3\cdot4\,q^2+\dots+(n+1)(n+2)\,q^n$.

**М3◇7.** Пух и Пятачок пошли в гости к Кролику, жившему в 10 *км*. Пух всё время шёл со скорстью 5 *км/ч*, а Пятачок — 10 *км/ч* (чтоб заранее проверить, дома ли Кролик). Добегая до Кролика, Пятачок мгновенно разворачивается и бежит к Пуху (сказать, что тот дома), а встречая Пуха, мгновенно разворачивается и снова бежит к Кролику (ещё раз удостовериться, что тот дома) и т. д. пока Пух не добрался до Кролика. Какое расстояние в общей сложности пробежит Пятачок? Какая бесконечная прогрессия при этом просуммировалась?

**М3◇8.** Какими надо взять в предыдущей задаче скорости Пуха и Пятачка и расстояние до дома Кролика, чтобы вычислив расстояние, которое пробежит Пятачок, можно было бы найти сумму бесконечной убывающей прогрессии $g_0 + g_0q + g_0q^2 + g_0q^3 + \dots$ с произвольно заданными положительными начальным членом $g_0$ знаменателем $q < 1$, если понимать под такой бесконечной суммой *наименьшее* число, большее любой конечной суммы. Докажите, что такое число существует и выразите его через начальный член и знаменатель прогрессии.

**М3◇9.** Придя в гости к Кролику, друзья разделили всю имевшуюся в доме провизию на три равные части и сели завтракать. Через 10 минут Пух успел полностью съесть свою долю, тогда как Кролик и Пятачок съели, соответственно, половину и треть от своей доли. Будучи воспитанными, Кролик с Пятачком отдали Пуху по половине от оставшейся у них провизии, но через 5 минут тот снова успел всё съесть, тогда как Кролик с Пятачком снова съели лишь половину и треть. Далее процесс повторялся, причём каждая следующая стадия происходила вдвое быстрее предыдущей. Через какое время вся провизия будет съедена и в каком отношении поделится она между Пухом, Кроликом и Пятачком?

**М3◇10.** Всегда ли при делении натуральных чисел «уголком» получится *периодическая* десятичная дробь[2]? Можно ли так получить дроби: **а)** $0,179179\dots$; **б)** $20,0520052005\dots$; **в)** $2,7435791179179179\dots$; **г)** $0,a_1\dots a_n\,b_1\dots b_m\,b_1\dots b_m\,\dots$ ($a_i$ и $b_j$ обозначают цифры[3])?

---

[1] который не так давно показывали в теленовостях

[2] конечная десятичная дробь тоже *является* периодической — её период состоит из одной цифры нуль

[3] ПОДСКАЗКА: попробуйте дробь с числителем $a_1\dots a_n b_1\dots b_m - a_1\dots a_n$