Суммирование разностей

Арифметическая прогрессия — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел a_k, в которой разность двух соседних чисел $a_k - a_{k-1}$ одинакова для всех k (она называется *разностью* или *приращением* прогрессии и обычно обозначается через d).

M2◇1°. Будет ли арифметической прогрессией последовательность, k-тый член которой равен:

а) $\dfrac{1+2+\cdots+k}{k}$ **б)** $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ **в)** k-му m-угольному числу Диофанта

г) разности $M_{k+1} - M_k$ между $(k+1)$-м и k-м m-угольными числами Диофанта

д) k-тому натуральному числу, оканчивающемуся на 13?

M2◇2°. Выразите n-тый член произвольной арифметической прогрессии через первый член и разность. Чему равно 43-е натуральное число, большее 57, с остатком 91 от деления на 179?

M2◇3°. В некой арифметической прогрессии $a_m = -a_n$ для каких-то $m < n$. При каких m, n эта прогрессия содержит нуль и под каким номером?

M2◇4°. Какие из перечисленных ниже свойств чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ необходимы, а какие — достаточны для того, чтобы эта последовательность была арифметической прогрессией?

а) любой элемент (кроме крайних), есть среднее арифметическое двух соседних;

б) $2\,a_i = a_{i-2} + a_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $a_i + a_{n-i}$ одинаково для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

M2◇5°. Выразите сумму $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ арифметической прогрессии[1] через:

а) a_1, a_n и n, **б)** a_1, n и приращение d; после чего

в) найдите сумму всех четырёхзначных чисел с остатком 57 от деления на 179.

M2◇6. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы размера $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых равна S.

M2◇7*. Можно ли разбить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в объединение (возможно, бесконечного) набора попарно непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий с разностями d_1, d_2, …, удовлетворяющими неравенству $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < 0,9$?

Суммирование разностей. Сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ легко вычислить, когда каждое её слагаемое представляется в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел из некой последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ (чему, кстати, будет равна такая сумма?). Эту идею можно развить: заменим каждое b_i подходящей суммой $b_i = \pm c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{im_i}$ так, чтобы при подстановке в исходную сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ бо́льшая часть «вспомогательных» слагаемых c_{ij} либо сокращалась, либо легко складывалась.

M2◇8. Чему равна сумма: **а)** $\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$; **б)** $1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n\,(n+1)$;

в) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с разностью d);

г) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$; **д)** $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n\,(n-1)\,(n+2)$;

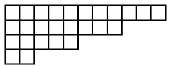
е) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$; **ж)** первых n m-угольных чисел.

M2◇9. Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

M2◇10. Пользуясь предыдущей задачей, вычислите сумму k-тых степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (поучительно сравнить это с зад. M1◇3 и зад. M1◇6).

M2◇11*. Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называются *целозначным*, если он принимает целые значения во всех целых x. Могут ли коэффициенты такого многочлена быть не целыми, и если да, то есть ли какие-нибудь ограничения на их знаменатели[2]?

---

[1] отметим, что прогрессии можно рисовать на клетчатой бумаге; например $2, 5, 8, 11$ — это 

[2] Скажем, может ли какой-нибудь коэффициент у целозначного квадратичного многочлена быть равен $1/3$? А у кубического? Что можно сказать о линейных f?