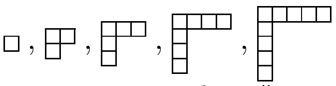
Геометрическое суммирование

... Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука... Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь, до бесконечности. Так вот, среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя — число же это называется стороной квадрата; затем кубы... Каждое из возрастающих от единицы чисел, начиная с трёх, является первым после единицы многоугольником и имеет столько углов, сколько в нём содержится единиц, стороной же его будет 2. Так, 3 будет треугольником, 4 — четырёхугольником, 5 — пятиугольником и т. д.

из книги Диофанта Александрийскго «Арифметика»
и его же учения «О многоугольных числах»

М1◇1°. Рассмотрим последовательность  , ... (древние греки называли Г-образные фигурки *гномонами*). Сколько клеток в k-той фигурке и чему равна суммарная площадь первых k гномонов?

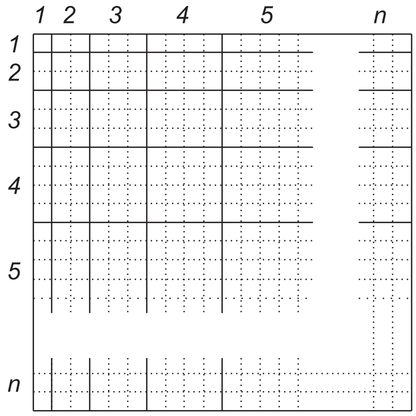
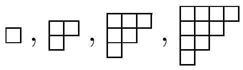
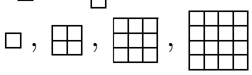


Рис. 1 - 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

М1◇2. Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? Вычислите сумму 300 нечётных чисел, начиная со 179, и сумму 200 чётных чисел, начиная с 444.

М1◇3°. Треугольные числа:  — это 1, 3, 6, 10, ... Четырёхугольные числа:  — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Явно выразите n-тое треугольное число T_n через n и найдите сумму первой тысячи натуральных чисел.

М1◇4° (пифагорова таблица умножения). Докажите, что $mk = km$, т. е. что $\underbrace{k + k + \cdots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{k}$. Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1 - 1? Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне ширины k, вершина которого представляет k^2, а стороны направлены влево и вверх и дают произведения k на 1, 2, ..., $(k-1)$?

М1◇5. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, ...

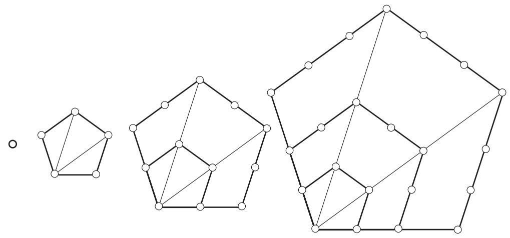


Рис. 1 - 2. Пятиугольные числа.

М1◇6. Вычислите суммы: **а)** $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$; **б)** $T_1 + 2T_2 + \cdots + nT_n$; **в*)** $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

М1◇7*. Вычислите сумму[1] $T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

М1◇8*. Вычислите суммы квадратов первых n чётных чисел и первых n нечётных чисел.

М1◇9. Пятиугольные числа Диофанта: $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, ...изображены на рис. 1 - 2. Чему равно $P_k - P_{k-1}$? Выразите P_n через n.

М1◇10. Дайте ясное определение n-того m-угольного числа Диофанта[2] M_n и напишите явную формулу, выражающую M_n через n.

[1] её можно было бы назвать n-тым «пирамидальным числом», поскольку, представляя себе треугольные числа из зад. М1◇3 сложенными не из клеточек, а из кубиков, можно думать об этой сумме как о треугольной пирамиде высоты n, в нижнем этаже которой находится T_n, затем T_{n-1} и т. д.

[2] наш эпиграф, как и всякий древний текст, полон тайн и неясностей, ибо дошёл до нас извилистым путём многократного перевода–пересказа, нередко выполненного людьми, в числах не слишком искушёнными...